

興奮性デジタル反応拡散システムを用いたボロノイ図生成 Voronoi Diagram Generation Using an Excitable Digital Reaction-Diffusion System

伊藤康一[†] 平塚眞彦[‡] 青木孝文[†] 樋口龍雄[§]
[†] 東北大学大学院情報科学研究科,
[‡] 仙台電波工業高等専門学校, [§] 東北工業大学工学部

Koichi ITO[†] Masahiko HIRATSUKA[‡] Takafumi AOKI[†] Tatsuo HIGUCHI[§]
[†] Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
[‡] Sendai National College of Technology
[§] Faculty of Engineering, Tohoku Institute of Technology

1 まえがき

生物は、発生や成長の過程においてさまざまな「形」を作り出している。発生学においては、このような生物の形やパターンの発生現象を指して「形態形成 (morphogenesis)」と呼んでいる。1952年に Turing は、「2つの仮想的な物質がある条件を満たしてお互いの生成を制御するとき、その物質の濃度分布は、濃度の高い部分と低い部分とが空間に繰り返すパターンを作って安定する」と主張し、形態形成現象の数理モデルを提案した [1]。この数理モデルは、連続系の反応拡散方程式で記述される。近年は、反応拡散系を基本にした生物の形態形成の数理モデルに関する研究が盛んに行われている [2]。

形態形成の数理モデルは、工学的な観点からも興味深いものが多い。たとえば、反応拡散系によってモデル化された生物の形態形成・パターン形成をヒントにして、能動的に信号を生成・加工する新しい信号処理システムを構築することができると考えられる [3, 4, 5]。これに対して、デジタル信号処理の観点から、筆者らは、離散時間・離散空間で定義した抽象的な反応拡散系のモデルとしてデジタル反応拡散システム (Digital Reaction-Diffusion System: DRDS) を提案し、テクスチャの生成、指紋画像復元、最短経路探索などへの応用を検討してきた [6, 7, 8]。

DRDS は、非線形反応関数の特徴に応じてさまざまな反応拡散系のダイナミクスをシミュレートでき、パターン形成現象のメカニズムを種々の工学的問題に利用することが可能である。本論文では、DRDS

の新しい応用として、興奮性反応拡散ダイナミクスを用いたボロノイ図生成アルゴリズムについて述べる。反応拡散ダイナミクス的一种である興奮性反応拡散ダイナミクスの下で発生する興奮波は、空間を等速度で伝搬し、衝突すると消滅するという性質を持っている。この性質を使うことで、近傍 2 点間から等距離にある線 (2 点間の垂直 2 等分線) を調べることができる。たとえば、平面上に指定した点群より波を生成させれば、波どうしの衝突を検出することで、それぞれの点より等距離にある線が描く幾何学的パターンを生成できる。本論文では、これをヒントとして、興奮性 DRDS を用いた離散空間におけるボロノイ図生成アルゴリズムを提案する。

2 興奮性デジタル反応拡散システム

まず、離散時間・離散空間で定義した抽象的な反応拡散系のモデルであるデジタル反応拡散システム (Digital Reaction-Diffusion System: DRDS) について述べる。そして、FitzHugh-南雲モデルの反応関数を用いた興奮性 DRDS と、興奮性 DRDS を用いた興奮波の生成について述べる。

2.1 デジタル反応拡散システム

DRDS は、連続系における一般的な反応拡散システムを時間および空間に対して離散化することにより得られる [6]。DRDS の一般式は次式で定義される。

$$x(n_0+1, n_1, n_2)$$

$$= \mathbf{x}(n_0, n_1, n_2) + \mathbf{R}(\mathbf{x}(n_0, n_1, n_2)) + \mathbf{D}(l * \mathbf{x})(n_0, n_1, n_2) \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_M]^T \\ x_i &: i \text{ 番目の仮想物質濃度} \\ \mathbf{R} &= T_0 \tilde{\mathbf{R}} = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_M(\mathbf{x})]^T \\ R_i(\mathbf{x}) &: i \text{ 番目の非線形反応関数} \\ \mathbf{D} &= \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_M] \\ \text{diag} &: \text{リストの要素からなる対角行列} \\ D_i &: i \text{ 番目の仮想物質の拡散係数} \end{aligned}$$

$$l(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{1}{T_1^2} & (n_1, n_2) = (-1, 0), (1, 0) \\ \frac{1}{T_2^2} & (n_1, n_2) = (0, -1), (0, 1) \\ -2(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}) & (n_1, n_2) = (0, 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であり、 l と濃度ベクトル \mathbf{x} との空間たたみこみ ($l * \mathbf{x}$) を次式で定義する。

$$\begin{aligned} (l * \mathbf{x})(n_0, n_1, n_2) &= \begin{bmatrix} (l * x_1)(n_0, n_1, n_2) \\ (l * x_2)(n_0, n_1, n_2) \\ \vdots \\ (l * x_M)(n_0, n_1, n_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{p_1=-1}^1 \sum_{p_2=-1}^1 l(p_1, p_2) x_1(n_0, n_1 - p_1, n_2 - p_2) \\ \sum_{p_1=-1}^1 \sum_{p_2=-1}^1 l(p_1, p_2) x_2(n_0, n_1 - p_1, n_2 - p_2) \\ \vdots \\ \sum_{p_1=-1}^1 \sum_{p_2=-1}^1 l(p_1, p_2) x_M(n_0, n_1 - p_1, n_2 - p_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

また、 n_0 は時間のインデックス、 (n_1, n_2) は空間のインデックス、 T_0 は時間のサンプリング周期、 (T_1, T_2) は空間のサンプリング周期である。

DRDS を実際に使用するときは、平衡点濃度に保たれている濃度ベクトル $\mathbf{x}(0, n_1, n_2)$ の適当な要素 (たとえば $x_1(0, n_1, n_2)$) に適切な初期値を与え、ある一定ステップ n_0 だけダイナミクスを動作させたあとの濃度ベクトル \mathbf{x} の適当な要素の濃度 (たとえば $x_1(n_0, n_1, n_2)$) を観測するものとする。

DRDS は、非線形反応関数を変えることでさまざまな反応拡散ダイナミクスをシミュレートできる。本論文では、興奮性媒質のモデルとして知られる FitzHugh-南雲 (FHN) モデル [2] の非線形反応関数を用いることにより、興奮性を示す反応拡散ダイナミクスをシミュレートする興奮性 DRDS を設計する。

2.2 興奮性 DRDS と波の生成

興奮性反応拡散ダイナミクスを模擬する DRDS を用い、計算機シミュレーションを通して、興奮波の発生を確認する。興奮性を有する系は、定常状態時にある値 (閾値) 以上の初期値を与えると系の挙動が大きく変化するという性質を持つ。閾値を持つことは、興奮性を示す系の顕著な特徴の 1 つである。以下では、興奮性ダイナミクスを模擬する DRDS の非線形反応関数を示し、興奮波生成の計算機シミュレーションについて述べる。

本論文では、2 種類 ($M = 2$) の物質を用いた DRDS を考え、反応関数として FitzHugh-南雲モデルを用いる。FitzHugh-南雲モデルを反応関数として用いた興奮性 DRDS は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(n_0+1, n_1, n_2) \\ x_2(n_0+1, n_1, n_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(n_0, n_1, n_2) \\ x_2(n_0, n_1, n_2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} R_1(x_1(n_0, n_1, n_2), x_2(n_0, n_1, n_2)) \\ R_2(x_1(n_0, n_1, n_2), x_2(n_0, n_1, n_2)) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_1(l * x_1)(n_0, n_1, n_2) \\ D_2(l * x_2)(n_0, n_1, n_2) \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} R_1(x_1, x_2) &= \frac{T_0}{k_1} \{x_1(x_1 - k_2)(1 - x_1) - x_2\} \\ R_2(x_1, x_2) &= T_0(x_1 - k_3 x_2) \end{aligned}$$

である。本論文では、興奮波を発生させるために興奮性 DRDS のパラメータとして $k_1 = 10^{-3}$, $k_2 = 10^{-6}$, $k_3 = 0.1$, $D_1 = 15$, $D_2 = 0$, $T_0 = 10^{-3}$, $T_1 = 1$, $T_2 = 1$ を用いた。

波の伝搬をシミュレートするときは、初期時間ステップ $n_0 = 0$ において、初期値として任意の点 (n_1^S, n_2^S) における物質 1 の濃度 $x_1(0, n_1^S, n_2^S)$ に閾値以上 (> 0.9) の濃度 (刺激) を与える。その他の点は、 $x_1(0, n_1, n_2)$, $x_2(0, n_1, n_2)$ とともに濃度を 0 に設定する。時間インデックス n_0 の増加に伴う物質 1 の空間濃度分布 $x_1(n_0, n_1, n_2)$ の変化を可視化することにより興奮波の伝搬を確認することができる。座

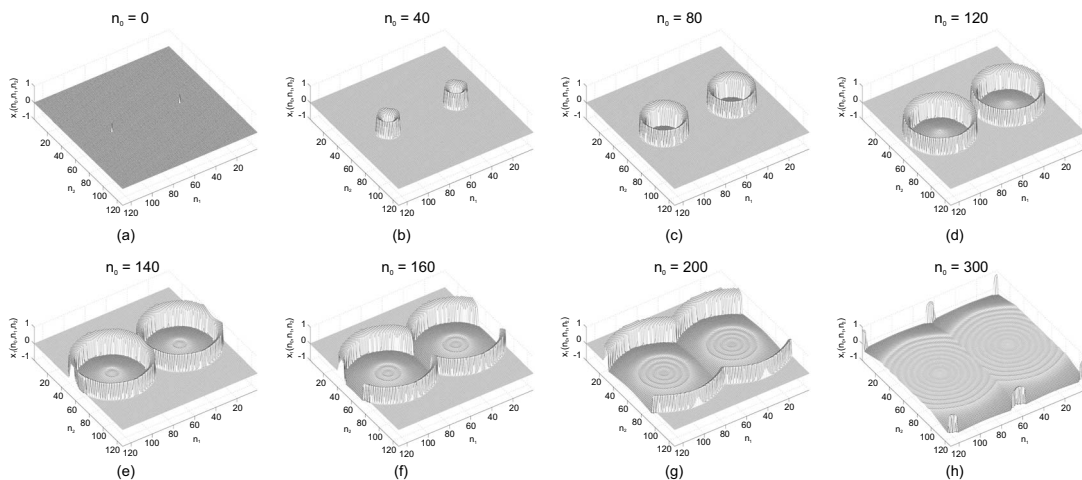


図 1: 2次元平面における興奮波の伝播: (a) 初期濃度分布 $x_1(0, n_1, n_2)$, (b)–(j) 波の衝突と消滅

標 (n_1, n_2) において, $x_1(n_0, n_1, n_2)$ の濃度がはじめて閾値を越えたとき, その座標 (n_1, n_2) に波が到着したとする.

たとえば, 128×128 ピクセルの 2次元空間を考える. 図 1 は, 初期値として $x_1(0, 32, 64) = x_1(0, 96, 64) = 0.9$ を与えたときに生成された興奮波である. 生成した興奮波は, 円状に広がり, もう一方の波と衝突すると消滅する. また, 生成した興奮波は, 本論文で用いたパラメータの場合, 1 ステップにつき 0.33 ピクセルの速度で伝播する. 伝播速度は, パラメータを変えることで容易に変化させることができる.

3 ボロノイ図生成アルゴリズム

ボロノイ図 (Voronoi diagram) は, 計算幾何学でよく取り扱われる幾何的なパターンの 1 つであり, 平面上に配置された点群を, 近接する点間の垂直 2 等分線により小さい領域に分割してできる図 (図 2) のことである [9]. ボロノイ図は, Delaunay 三角形分割と相対の関係にあり, Delaunay 三角形を作成するために使われる. また, 多角形の中軸線 (medial axis) や骨格線 (skeleton) の生成にもよく使われる. ボロノイ図の応用には, 勢力範囲の作成, 最適経路探索などの計算幾何学への応用だけではなく, 3次元点群間のメッシュ生成やテクスチャマッピングなどのコンピュータグラフィックスへの応用もある. 一般的に用いられているボロノイ図生成アルゴリズム

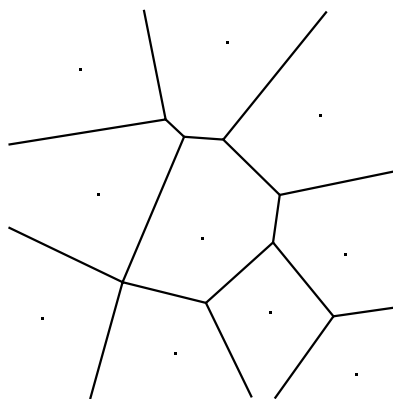


図 2: ボロノイ図

は, Fortune が提案した平面走査アルゴリズムである [9]. これは, 走査線を上下に動かしながら平面を走査し, 近接する 2 点間の垂直 2 等分線を求めるアルゴリズムである. これに対し, 興奮性反応拡散ダイナミクスにより発生する興奮波の性質を利用したボロノイ図生成手法が提案されている [10, 11]. 興奮波は, 刺激を与えた点から等速度で進み, 他の波と衝突すると消滅する. この性質を基に, 単純な計算のみでボロノイ図を作成することが可能である. このような手法には, たとえば, 溶液中の化学反応を利用した手法 [10] や, 反応拡散場を模擬する単電子

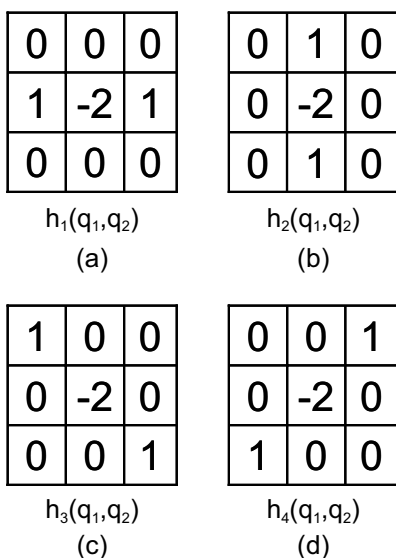


図 3: 興奮波の衝突を検出するために使用するカーネル: (a) 横方向, (b) 縦方向, (c), (d) 斜め方向

デバイスを利用した手法 [11] が報告されている。しかしながら、化学反応やデバイスをを用いて興奮波を生成するため、容易にパラメータを変化することができなかつたり、扱う問題の大きさが固定されてしまつたり、使用環境が限られてしまう問題がある。これに対して、本論文では、離散時間・離散空間で定義された信号処理モデルである DRDS を用いたポロノイ図生成アルゴリズムを提案する。提案するアルゴリズムは、容易に計算機上に実装することで、さまざまな大きさの問題を解くこともできる。

興奮性 DRDS の下で生成する興奮波の性質を利用したポロノイ図生成アルゴリズムについて述べる。提案するポロノイ図生成アルゴリズムは、(i) 初期設定, (ii) 興奮波の伝搬, (iii) 波の衝突の検出の 3 ステップから構成される。

(i) 初期設定

まず、時間ステップ n_0 を 0 に初期化する。入力するマップは、2 値化画像であり、画素値を 1 (白) と設定した地点から画素値を 0 (黒) に設定した領域へ興奮波を伝搬するように設定する。そこで、入力されたマップに従い、 $x_1(0, n_1, n_2)$ を初期化する。マップ上の画素値が 1 の場合は $x_1(0, n_1, n_2) > 0.9$ とし、0 の場合は $x_1(0, n_1, n_2) = 0$ とする。また、

$x_2(0, n_1, n_2) = 0$ とする。

(ii) 興奮波の伝搬

マップにしたがって境界条件を設定し、興奮性 DRDS (式 (2)) を 1 ステップ計算し、 $x_1(n_0 + 1, n_1, n_2)$ と $x_2(n_0 + 1, n_1, n_2)$ を求める。

(iii) 波の衝突の検出

ある画素を中心とした 3×3 画素のブロックを考えると、波どうしが衝突する前には、必ず周りにある 8 画素のうち中心に対して対称な 2 画素に波が到達している。そこで、図 3 に示すカーネルを利用して波の衝突を検出する。たとえば、波どうしが衝突する地点は、その地点に波が到達していなく、かつ周りに波が対称に存在している。そのため、カーネルをたたみ込んだ後の出力は 2 となる。一方、中心画素が興奮波上にある場合は、中心画素に対して対称に波が存在していたとしても、すでに中心画素に波が到達しているため、出力は 0 となる。

以上より、波の衝突の検出は以下の手順で行う。まず、 $x_1(n_0 + 1, n_1, n_2)$ を閾値 (0.9) で 2 値化し、 $B(n_1, n_2)$ を求める。次に、2 値化した $B(n_1, n_2)$ にそれぞれのカーネル $h_i (i = 1, \dots, 4)$ を次式のようにたたみ込む。

$$V_i(n_1, n_2) = \sum_{q_1=-1}^1 \sum_{q_2=-1}^1 h_i(q_1, q_2) B(n_1 - q_1, n_2 - q_2) \quad (3)$$

そして、得られた 4 つの出力 $V_i(n_1, n_2)$ のうち、いずれかにおいて 2 となれば、その画素を波が衝突した画素とする。その後、 $n_0 = n_0 + 1$ として (ii) を繰り返し実行する。

(ii) と (iii) の処理は、マップ上に興奮波が存在しなくなるまで繰り返す。

4 実験と考察

提案するポロノイ図生成アルゴリズムを用いた実験について述べる。本実験では、(i) 点群, (ii) 幾何的なマップ, (iii) 手書き文字を入力マップとして用いた。(i) は提案アルゴリズムを用いたポロノイ図の生成, (ii) と (iii) はポロノイ図生成アルゴリズムを利用したスケルトンの生成に関する実験である。

(i) 点群

2 次元平面上にランダムに配置した 11 の点を初期入力画像とする。図 4 は、それぞれの点から興奮性 DRDS により興奮波を生成し、波の衝突を検出してポロノイ図を求めている様子である。実験結果より、

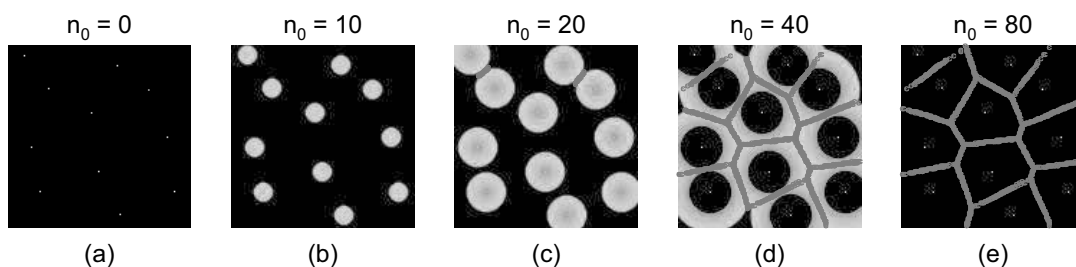


図 4: 点群を入力したときに生成されるボロノイ図 (波どうしの衝突が検出された地点を赤点で示している)

興奮波の衝突を検出することでボロノイ図が生成されていることがわかる。

(ii) 幾何的なマップ

ここでは、2次元平面上に配置したさまざまな幾何的なマップを入力画像としてボロノイ図の生成を利用したスケルトン生成の実験を示す。平面上に点群が与えられた場合は、その点を母点としたボロノイ図を生成することができる。それに対して、幾何的な構造を入力として与えた場合は、入力された構造のスケルトンを求めることができる。図5に、実験で用いた4種類のマップに対する実験結果を示す。図5(a)–(c)のような迷路状のマップの場合は、それらの構造のスケルトンがほぼ正確に求まっている。図5(d)のような構造の場合は、興奮波の衝突検出の失敗により、正確にスケルトンが求まらない箇所が生じることがある。検出の失敗は、離散化による誤差、興奮性 DRDS のパラメータの設定、波の衝突を検出するためのカーネルが不十分であることが原因として考えられる。

(iii) 手書き文字

2次元画像のスケルトンは、手書き文字認識などの前処理でよく用いられている。ここでは、入力画像として手書き文字を用い、そのスケルトンを求める実験を行った。図6に、手書き文字のスケルトンを求めた結果を示す。実験結果より、それぞれの手書き文字に対してほぼ正確にそのスケルトンが求まっていることがわかる。

5 まとめ

本論文では、興奮性デジタル反応拡散システムを用いたボロノイ図生成アルゴリズムについて述べた。興奮性デジタル反応拡散システムにおいて生成される興奮波のパターンが有する「等速で伝搬」、「他の波と衝突すると消滅」という特徴を用いることで、

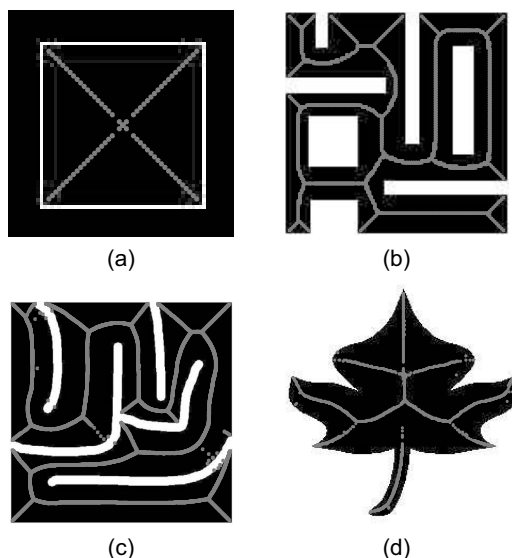


図 5: 幾何的なマップを入力したときに生成されるスケルトン: (a) $n_0 = 50$, (b) $n_0 = 45$, (c) $n_0 = 105$, (d) $n_0 = 80$ における出力画像

計算幾何学の分野でよく扱われているボロノイ図を作成できることを示した。実験では、ボロノイ図だけではなく、入力された幾何的な構造のスケルトンも生成できる可能性を示した。これまでに、計算幾何学の問題を解くために、デジタル信号処理を利用することはあまりなかった。これに対して、DRDSにより生成されるパターンは、本論文で示したように計算幾何学の問題を解くために有用であることがわかる。このように、DRDSは、信号やパターンを能動的に生成する新しいデジタル信号処理システムであるだけでなく、デジタル信号処理の新しい

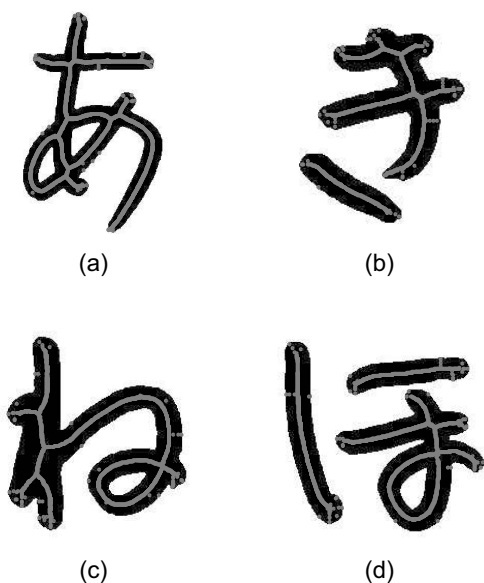


図 6: 手書き文字を入力したときに生成されるスケルトン: (a) $n_0 = 45$, (b) $n_0 = 50$, (c) $n_0 = 40$, (d) $n_0 = 40$ における出力画像

い応用分野を拓くことが期待される。

参考文献

- [1] A. M. Turing, “The chemical basis of morphogenesis,” *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. B237, pp. 37–72, Aug. 1952.
- [2] J. D. Murray, *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] A. S. Sherstinsky and R. W. Picard, “M-lattice: From morphogenesis to image processing,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, no. 7, pp. 1137–1150, July 1996.
- [4] K. R. Crouse and L. O. Chua, “Methods for image processing and pattern formation in cellular neural networks: A tutorial,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, vol. 42, no. 10, pp. 583–601, Oct. 1995.
- [5] L. Goras, L. O. Chua, and L. Pivka, “Turing patterns in CNNs—part II: Equations and behaviors,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I*, vol. 42, no. 10, pp. 612–626, Oct. 1995.
- [6] K. Ito, T. Aoki, and T. Higuchi, “Digital reaction-diffusion system —A foundation of bio-inspired texture image processing—,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E84-A, no. 8, pp. 1909–1918, Aug. 2001.
- [7] —, “Fingerprint restoration using digital reaction-diffusion system and its evaluation,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E86-A, no. 8, pp. 1916–1924, Aug. 2003.
- [8] K. Ito, M. Hiratsuka, T. Aoki, and T. Higuchi, “A shortest path search algorithm using an excitable digital reaction-diffusion system,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E89-A, no. 3, Mar. 2006, (to be published).
- [9] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational Geometry*. Springer, 2000.
- [10] A. Adamatzky, “Computing with waves in chemical media: Massively parallel reaction-diffusion processors,” *IEICE Trans. Electron.*, vol. E87-C, no. 11, pp. 1748–1756, Nov. 2004.
- [11] T. Asai, B. De Lacy Costello, and A. Adamatzky, “Silicon implementation of a chemical reaction-diffusion processor for computation of Voronoi diagram,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 10, pp. 3307–3320, 2005.