第16回　回路とシステム
（軽井沢）ワークショップ
The 16th Workshop on Circuits and Systems
in Karuizawa, April 27, 28, 2003

# 経路探索のための興奮性ディジタル反応拡散システムの設計

# Design of an Excitable Digital Reaction-Diffusion System for Path Finding

伊藤 康一　　永田 識　　青木 孝文　　樋口 龍雄
東北大学大学院情報科学研究科

Koichi ITO　　Satoru NAGATA　　Takafumi AOKI　　Tatuo HIGUCHI
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

**あらまし**　本論文は，離散時間・離散空間で定義された抽象的な反応拡散システムのモデルであるディジタル反応拡散システム (Digital Reaction-Diffusion System: DRDS) を利用した最短経路探索アルゴリズムを提案する．DRDS は，能動的に信号や画像を生成する多次元のディジタルフィルタであり，用いる非線形反応関数を変えることで，さまざまなパターン・テクスチャ・構造を発生することが可能である．本論文では，神経インパルス伝導のモデル式である FitzHugh-南雲システムの反応関数を用いた DRDS を提案し，これを用いて興奮性反応拡散ダイナミクスをシミュレートした結果を示す．そして，この興奮性を有する DRDS が発生する興奮波の性質を利用した最短経路探索アルゴリズムを提案し，迷路や障害物が配置された平面から最短経路を探索した実験結果を示す．

## 1　まえがき

生物は，発生や成長の過程においてさまざまな「形」を作り出している．発生学においては，このような生物の形やパターンの発生現象を指して「形態形成 (morphogenesis)」と呼んでいる．1952 年に Alan Turing は，「2 つの仮想的な物質が，ある条件を満たしてお互いの生成を制御するとき，その物質の濃度分布は，濃度の高い部分と低い部分とが空間に繰り返しパターンを作って安定する」と主張し，形態形成現象の数理モデルを提案した [1]．この数理モデルは，連続系の反応拡散方程式で記述される．近年は，反応拡散系を基本にした生物の形態形成の数理モデルに関する研究が盛んに行われている [2]．

形態形成の数理モデルは，工学的な観点からも興味深いものが多い．たとえば，反応拡散系によってモデル化された生物の形態形成・パターン形成をヒントにして，能動的に信号を生成・加工する新しい信号処理システムを構築することができると考えられる [3]–[5]．以上のような観点から，筆者らは，離散時間・離散空間で定義した抽象的な反応拡散系のモデルとしてディジタル反応拡散システム (Digital Reaction-Diffusion System: DRDS) を提案し，指紋画像復元やテクスチャ生成などへ応用してきた [6]．

DRDS は，用いた非線形反応関数に応じてさまざまな反応拡散系のダイナミクスをシミュレートでき，パターン形成現象のメカニズムを種々の工学的問題に利用することが可能である．本論文では，DRDS の新しい応用の一例として，興奮性反応拡散ダイナミクスを用いた最短経路探索アルゴリズムについて述べる．反応拡散ダイナミクスの一種である興奮性反応拡散ダイナミクスにより発生する興奮波は，空間を等速度で伝搬し，衝突すると消滅するという性質を持っている．

たとえば，興奮性を有する媒体によって満たされた空間を想定し，この空間内のスタート点に刺激を与えたとすると，興奮波がスタート点を基準とした等距離の波面を形成しながら伝搬する．この波面を利用すると，スタート点から到達可能な任意の点までの最短経路を探索することが可能であると考えられる．実際にこのような考えに基づき，興奮性を有する化学反応として知られる Belousov-Zhabotinsky 反応を用い，複雑な迷路の最短経路を求めるためのマップを生成できることが示されている [7]．本論文では，これをヒントとして，興奮性 DRDS を用いた離散空間における最短経路探索アルゴリズムを提案する．

## 2　興奮性ディジタル反応拡散システム

ここでは，離散時間・離散空間で定義した抽象的な反応拡散系のモデルであるディジタル反応拡散システム (Digital Reaction-Diffusion System: DRDS) について述べる．そして，FitzHugh-南雲システムの反応関数を

用いたDRDSを利用して，興奮性反応ダイナミクスのシミュレーションを行う．また，その際に発生する興奮波の性質について説明する．

### 2.1 ディジタル反応拡散システム

DRDSは，連続系における一般的な反応拡散システムを時間および空間に対して離散化することにより得られる[6]．DRDSの一般式は次式で定義される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(n_0{+}1,n_1,n_2) \\ = \;& \boldsymbol{x}(n_0,n_1,n_2){+}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}(n_0,n_1,n_2)) \\ & {+}\boldsymbol{D}(l*\boldsymbol{x})(n_0,n_1,n_2) \qquad (1)\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= [x_1,x_2,\cdots,x_M]^T \\ & \quad x_i: i\text{ 番目の仮想物質濃度} \\ \boldsymbol{R} &= T_0\tilde{\boldsymbol{R}} = [R_1(\boldsymbol{x}),R_2(\boldsymbol{x}),\cdots,R_M(\boldsymbol{x})]^T \\ & \quad R_i(\boldsymbol{x}): i\text{ 番目の非線形反応関数} \\ \boldsymbol{D} &= diag[D_1,D_2,\cdots,D_M] \\ & \quad diag: \text{リストの要素からなる対角行列} \\ & \quad D_i: i\text{ 番目の仮想物質の拡散係数}\end{aligned}$$

$$l(n_1,n_2) = \begin{cases} \frac{1}{T_1^2} & (n_1,n_2)=(-1,0),(1,0) \\ \frac{1}{T_2^2} & (n_1,n_2)=(0,-1),(0,1) \\ -2(\frac{1}{T_1^2}+\frac{1}{T_2^2}) & (n_1,n_2)=(0,0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であり，$l$と濃度ベクトル$\boldsymbol{x}$との空間たたみこみ$(l*\boldsymbol{x})$を次式で定義する．

$$(l*\boldsymbol{x})(n_0,n_1,n_2) = \begin{bmatrix} (l*x_1)(n_0,n_1,n_2) \\ (l*x_2)(n_0,n_1,n_2) \\ \vdots \\ (l*x_M)(n_0,n_1,n_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{p_1=-1}^{1}\sum_{p_2=-1}^{1} l(p_1,p_2)x_1(n_0,n_1-p_1,n_2-p_2) \\ \sum_{p_1=-1}^{1}\sum_{p_2=-1}^{1} l(p_1,p_2)x_2(n_0,n_1-p_1,n_2-p_2) \\ \vdots \\ \sum_{p_1=-1}^{1}\sum_{p_2=-1}^{1} l(p_1,p_2)x_M(n_0,n_1-p_1,n_2-p_2) \end{bmatrix}$$

また，$n_0$は時間のインデックス，$(n_1,n_2)$は空間のインデックス，$T_0$は時間のサンプリング周期，$(T_1,T_2)$は空間のサンプリング周期である．

DRDSを実際に使用するときは，平衡点濃度に保たれている濃度ベクトル$\boldsymbol{x}(0,n_1,n_2)$の適当な要素(たとえば$x_1(0,n_1,n_2)$)に適切な初期値を与え，ある一定ステップ$n_0$だけダイナミクスを動作させたあとの濃度ベクトル$\boldsymbol{x}$の適当な要素の濃度(たとえば$x_1(n_0,n_1,n_2)$)を観測するものとする．

DRDSは，用いる非線形反応関数を変えることでさまざまな反応拡散ダイナミクスをシミュレートできる．本論文では，興奮性媒質のモデルとして知られるFitzHugh-南雲(FHN)システム[2]の非線形反応関数を用いることにより，興奮性を示す反応拡散ダイナミクスをシミュレートするDRDSを設計する．

### 2.2 DRDSによる興奮波の発生

興奮性反応拡散ダイナミクスを模擬するDRDSを用い，計算機シミュレーションを通して，興奮波の発生を確認する．興奮性を有する系は，定常状態時にある値以上の初期値を与えると系の挙動が大きく変化するという性質を持つ．一般的に，この値のことを閾値という．閾値を持つことは，興奮性を示す系の顕著な特徴の1つである．以下では，興奮性ダイナミクスを模擬するDRDSの非線形反応関数を示し，そのパラメータの設定および計算機シミュレーションの結果について述べる．

本論文では，2種類$(M=2)$の物質を用いたDRDSを考え，反応関数としてFitzHugh-南雲モデルを用いる．FitzHugh-南雲モデルを反応関数として用いた興奮性DRDSは次式で定義される．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1(n_0{+}1,n_1,n_2) \\ x_2(n_0{+}1,n_1,n_2)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(n_0,n_1,n_2) \\ x_2(n_0,n_1,n_2)\end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} R_1(x_1(n_0,n_1,n_2),x_2(n_0,n_1,n_2)) \\ R_2(x_1(n_0,n_1,n_2),x_2(n_0,n_1,n_2))\end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_1(l*x_1)(n_0,n_1,n_2) \\ D_2(l*x_2)(n_0,n_1,n_2)\end{bmatrix} \qquad (2)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} R_1(x_1,x_2) &= \frac{T_0}{k_1}\{x_1(x_1{-}k_2)(1{-}x_1){-}x_2\} \\ R_2(x_1,x_2) &= T_0\,(x_1-k_3x_2)\end{aligned}$$

である．本論文では，興奮波を発生させるために興奮性DRDSのパラメータとして$k_1=10^{-3}$, $k_2=10^{-6}$, $k_3=0.1$, $D_1=40$, $D_2=0$, $T_0=10^{-3}$, $T_1=1$, $T_2=1$を用いた．

波の伝搬をシミュレートするときは，初期時間ステップ$n_0=0$において，初期値としてスタート点$(n_1^S,n_2^S)$における物質1の濃度$x_1(0,n_1^S,n_2^S)$に閾値以上の濃度(刺

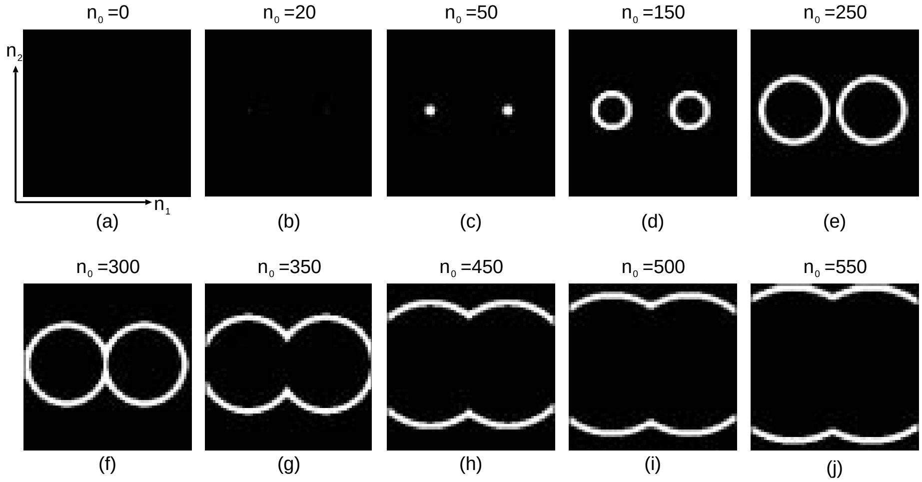


図 2: 2 次元平面における興奮波の衝突と相互作用: (a) 2 次元平面，(b)–(j) 波の衝突と消滅

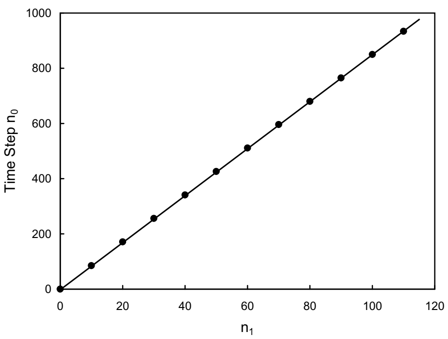


図 1: 空間インデックス $n_1$と $(n_1, 0)$ から $(n_1+1, 0)$ まで移動するために要する時間ステップ $n_0$との関係

激) を与える．その他の点は，$x_1(0, n_1, n_2)$, $x_2(0, n_1, n_2)$ ともに濃度を平衡点に設定する．時間インデックス $n_0$ の増加に伴う物質 1 の空間濃度分布 $x_1(n_0, n_1, n_2)$ の変化を可視化することにより興奮波の伝搬を確認することができる．座標 $(n_1, n_2)$ において，$x_1(n_0, n_1, n_2)$ の濃度が初めて閾値を越えたとき，その座標 $(n_1, n_2)$ に波が到着したとする．

例 **1**: 興奮波の性質 (等速度で伝搬)

興奮波が等速度で伝搬することを示す．図 1は，128×128 の 2 次元平面において，(0, 0) に刺激を与えて (物質 1 の濃度 $x_1(0, 0, 0)$ に閾値以上の濃度を設定して) から，$(n_1, 0)$ に波が到着する ($x_1(n_0, n_1, 0)$ の濃度が閾値を越える) までに要する時間ステップ $n_0$と空間インデックス $n_1$の関係である．$(n_1, 0)$ から $(n_1+1, 0)$ まで移動するために要する時間ステップ $n_0$は 85 ステップであり，等速度で波が伝搬することが確認できる． □

例 **2**: 興奮波の性質 (衝突すると消滅)

興奮波の相互作用の例を図 2に示す．128 × 128 の 2 次元平面 (図 2(a)) において，$(n_1, n_2) = (64, 32), (64, 96)$ の 2 点に刺激を与えた．発生した興奮波は円状に広がり，衝突すると消滅する (図 2(b)–(j))．波が衝突した際に干渉を起こさずに消滅することは，興奮波特有の性質である． □

例 1, 2 から，興奮波が「波が衝突すると互いに消滅する」・「等速度で伝わる」という性質を持っていることが確認できた．以下では，これらの性質を利用した最短経路探索アルゴリズムを提案する．

## 3 DRDS を用いた最短経路探索アルゴリズム

本章では，興奮性 DRDS が発生する興奮波の性質を利用した最短経路探索アルゴリズムを提案する．まず，興奮波の性質を利用した最短経路探索の概念について説明する．続いて，提案する最短経路探索アルゴリズムについて述べる．

前章で述べたように興奮性 DRDS を用いることで離散平面において等速度で伝わる波を発生させることができる．この波は，等速度で伝わり，他の波や障害物に衝突すると消滅するため，障害物が配置された平面で発生させると最短経路を含む等距離面を生成することができる．この等距離面をバックトラックすることで，ゴール点からスタート点までの最短経路を求める

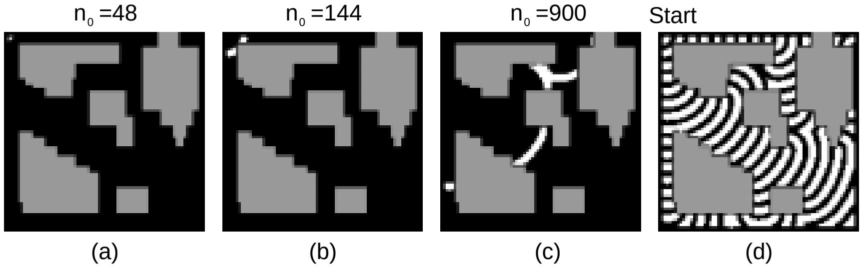


図 3: 障害物を配置した自由空間における興奮波の伝搬: (a)–(c) 波の伝搬，(d) 波の重ね合わせ

ことができる．たとえば，障害物を配置した $128 \times 128$ の自由空間に興奮波を伝搬させたときの様子を図 3に示す．まず，自由空間内の 1 点 (スタート点) に初期刺激を与え，波を伝搬させる (図 3(a))．伝搬先に障害物があった場合，波は障害物の存在しない自由空間に分岐する (図 3(b))．波の伝搬により各座標に波が到達するが，興奮波の性質から，最初に到達した波があとから到着した波を打ち消す (図 3(c))．波は等速度で伝搬するため，波面はスタート点を基準として等距離面を形成する．最後に，一定の時間ステップごとに波を重ね合わせると，スタート点から到達可能な全地点への最短経路の情報を含んだマップが得られる．図 3(d) は，$n_0 = 72k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ の波を重ね合わせて表示したものである．興奮波の伝搬終了後に，ゴールからスタートまで波面をたどることによって最短経路を求める．

興奮性 DRDS で発生した興奮波が形成する等距離面にスタート点から任意の点までの最短経路が存在していることを帰納法により証明する．まず，$n_0 = 0$ においてスタート点に刺激を与え，興奮波を発生させる．発生した興奮波の波面は，スタート点から最短距離にある点の集合となっている．$n_0 = i$ のとき，興奮波の波面は，スタート点から波面上の点までの最短経路を含んでいるとする．$n_0 = i+1$ のとき，興奮波の波面は，$n_0 = i$ に関する等距離面となっている．そのため，$n_0 = i+1$ の波面は，$n_0 = i$ の波面から最短距離にある点の集合となっているので，スタート点から $n_0 = i$ の波面までの最短経路が含まれている．以上より，DRDS で発生させた波は，到達した任意の点からスタート点までの最短経路を含み，任意の点からそれぞれの波どうしを最短距離で結ぶようにバックトレースすることでスタート点までの最短経路を求めることができる．

提案する最短経路探索アルゴリズムは大きく分けて，興奮波の伝搬時に行う処理 (前進操作: *Forward Operation*) と伝搬終了後に行う処理 (バックトレース: *Backtrace*) とからなる．

**A. 伝搬時の処理 (前進操作)**

前進操作のアルゴリズムを図 4に示す．前進操作は，興奮性 DRDS を用いてスタート点からゴール点までの等距離面を生成する操作である．まず，物質 1 の濃度 $x_1(0, n_1, n_2)$ に対して，スタート点に閾値 $Thr$ 以上の濃度を設定し，それ以外の点には平衡点濃度を設定する．物質 2 の濃度 $x_1(0, n_1, n_2)$ は，すべての点に対して平衡点濃度を設定する．そして，式 (2) を計算する．その際，平面の端で波が反射しないという条件 (流れなし境界条件) と，障害物内部には波が伝搬しないという条件のもとで計算する．また，計算結果よりそれぞれのステップで波の存在している座標を $W(n_0)$ に記録する．最後に，ゴール点に波が到達した時間ステップを $n_0^G$ に保存する．

**B. 伝搬後の処理 (バックトレース)**

バックトレースのアルゴリズムを図 5に示す．バックトレースでは，ゴール点から操作を始めるので，時間ステップ $n_0$ をゴールに到達した $n_0^G$ に設定し，探索点をゴール点とする．まず，現在のステップより $\Delta$ ステップ前の波面情報 $W(n_0 - \Delta)$ を読み込む．読み込んだ波面の座標の中で探索点まで距離が最短である点を求め，それを次の探索点とし，最短経路のリストである $Path$ に入れる．距離が最短である点が複数求まった場合は，分岐が生じている可能性があるので，以下に示す分岐処理を行う．はじめに，複数求まった点を一時リスト $Temp$ に入れる．続いて，さらに $\Delta$ ステップ前の波面情報 $W(n_0 - 2\Delta)$ を読み込む．読み込んだ波面情報の中で複数求まったそれぞれの点まで最短距離にある点を求め，$\Delta$ ステップ先見する．$\Delta$ ステップ前で分岐していたとしても，$2\Delta$ ステップ前でほぼ同じ座標であれば，分岐は生じていないとみなす．また，先見した点が離れていれば経路が分岐しているとする．以上より，$2\Delta$ ステップ先見した点の位置より $Temp$ に入っている点群を

```
program Forword Operation
    Input
        障害物を含んだ経路情報, スタート点 (n_1^S, n_2^S), ゴール点 (n_1^G, n_2^G);
    Output
        W(n_0): n_0 ステップにおいて物質 1 の濃度 x_1(n_0, n_1, n_2) が閾値 Thr 以上の点の座標を保存
        n_0^G: ゴール点に波が到達した時間ステップ;

begin
    x_1(0, n_1, n_2) について，スタート点の濃度 x_1(0, n_1^S, n_2^S) に Thr 以上の濃度を設定し，その他の点に平衡点濃度
    を設定する;
    x_2(0, n_1, n_2) について，すべての点に平衡点濃度を設定する;
    W(0) にスタート点の座標を保存する;
    n_0 := 0; { 時間ステップを初期化 }
    while 波がゴールに到達していない do
        begin
            経路情報にしたがって境界条件を設定し，DRDS(式 (2)) の計算を実行する;
            計算結果 (x_1(n_0+1, n_1, n_2)) にしたがって波面情報を W(n_0+1) に保存する;
            n_0 := n_0 + 1
        end;
    n_0^G := n_0
end.
```

図 4: 前進操作のアルゴリズム

グルーピングする．そして，それぞれのグループに入っている点群の平均を整数値として $Temp$ に返す．$Temp$ に入っている座標の 1 つを新しい探索点とし，残りの座標は，分岐した経路なので，探索リストに入れる．以上の操作を探索点がスタート点になり，かつ探索リストが空になるまで続ける．最終的に，$Path$ にゴール点からスタート点までの最短経路上に存在する点が格納される．

提案するアルゴリズムを用いて最短経路を求めた実験結果を示す.

例 **3**: 最短経路探索

図 6は，提案するアルゴリズムを用いて最短経路を探索した結果である．図 6(a) は迷路を経路情報として与えた場合，図 6(b) はさまざまな障害物を与えた場合である．どちらの場合も，ゴール点からスタート点までの最短経路が求められている． □

## 4　まとめ

本論文では，興奮性ダイナミクスを用いた最短経路探索アルゴリズムを提案し，そのアルゴリズムを用いて最短経路探索を行った．まず，興奮性反応拡散ダイナミクスをシミュレートする DRDS を利用して，興奮波を発生させた．そして，興奮波の持つ「等速度で伝搬する」・「互いに衝突すると消滅する」という性質を示した．また，DRDS が発生する興奮波の性質を利用した最短経路探索アルゴリズムを提案し，実際に 2 次元平面での経路探索を行った．

## 参考文献


[1] A. M. Turing, “The chemical basis of morphogenesis,” Phil. Trans. Roy. Soc. London, Vol. B237, pp. 37–72, Aug. 1952.

[2] J. D. Murray, “Mathematical Biology,” Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] A. S. Sherstinsky and R. W. Picard, “M-lattice: from morphogenesis to image processing,” IEEE Trans. Image Processing, Vol. 5, No. 7, pp. 1137–1150, July 1996.

[4] K. R. Crounse and L. O. Chua,“Methods for image processing and pattern formation in cellular neural networks: a tutorial,” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, vol.42, no.10, pp.583–601, Oct. 1995.

[5] L. Goras, L. O. Chua and L. Pivka, “Turing patterns in CNNs–part II: equations and behaviors,” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, vol.42, no.10, pp.612–626, Oct. 1995.

[6] K. Ito, T. Aoki and T. Higuchi, “Digital reaction-diffusion system — A foundation of bio-inspired texture image processing —,” IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E84-A, No. 8, pp. 1909–1918, Aug. 2001.

[7] O. Steinbock, Á. Tóth and K. Showalter, “Navigating complex labyrinths: optimal paths from chemical waves,” Science, Vol. 267, pp. 868–871, Feb. 1995.

```
program Backtrace
    Input
        スタート点 (n_1^S, n_2^S), ゴール点 (n_1^G, n_2^G), W(n_0), n_0^G,
        Δ: Backtrace の時間ステップに関する分解能 (自然数);
    Output
        Path: ゴール点からスタート点までに存在する最短経路のリスト;

begin
    ゴール点を Path と探索リスト入れる;
    n_0 := n_0^G; { ゴールに波が到達した時間ステップに設定 }
    while 探索リストが空でない do
        begin
            探索リストの先頭に入っている点を取り出し，探索点とする;
            while n_0 > 0 do
                begin
                    W(n_0−Δ) の中で探索点との距離が最小となる点を求める;
                    求めた点を一時リスト Temp に入れる;
                    if Temp に複数の点が入っている then
                        begin
                            W(n_0−2Δ) の中で Temp に入っているそれぞれの点との距離が最小となる点を求める;
                            求めた点 (Δステップ先見した点) のそれぞれ位置によって Temp 内の点群をグルーピングする;
                            それぞれのグループに含まれている点群の平均 (整数値) を Temp に返す;
                            Temp に入っている点の 1 つを新しい探索点とし，残りの点を探索リストの先頭に入れる
                        end;
                    else
                        Temp に入っている点を取出し，新しい探索点とする;
                    Path の先頭に探索点を入れる;
                    n_0 := n_0 − Δ { 時間ステップの更新 }
                end;
            Path の先頭にスタート点を入れる
        end;
    Path に入っている点を結んで経路を表示する
end.
```

図 5: バックトレースのアルゴリズム

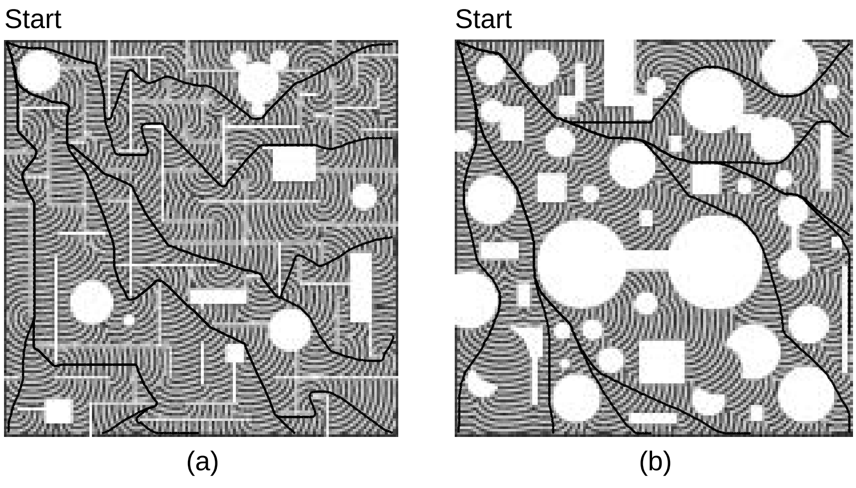


図 6: 512 × 512 の 2 次元平面における興奮波の伝搬と最短経路探索の結果: (a) 迷路を配置したマップ，(b) 障害物を配置したマップ